线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性方程组求解

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

若 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0), 以及 $\vec{e}_j$ 在基 $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ 下的坐标为 (a_{1j},a_{2j},a_{3j}). 则

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x'_0 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y'_0 \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z'_0 \end{aligned}}$$

复数与数域

设 $\omega = a + ib = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$。

- 若用坐标表示复数, 则乘复数 ω 给出如下复平面的变换:
$$(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$
- 若用极坐标表示复数，则乘复数 ω 有如下几何解释:
$$z \xrightarrow{\text{伸缩 } t \text{ 倍}} tz \xrightarrow{\text{逆时针旋转 } \varphi \text{ 角度}} \omega z.$$

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

性质

有理数域 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域. 即, 若 $\mathbb{F}$ 为数域, 则 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$.

设 $\mathbb{F}$ 为数域, n 为正整数.

定义

我们称一个由 n 个 $\mathbb{F}$ 上的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\vec{a} := (a_1, \cdots, a_n)$$

为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维数组向量. 其中 a_i 称为 $\vec{a}$ 的第 i 个分量. 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维数组向量全体记为 $\mathbb{F}^n$.

设 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n, \vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{F}^n, \lambda \in \mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$.
- 数乘: $\lambda\vec{a} := (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$.
- 线性运算八条基本性质。

线性相关 (高维数组向量)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{F}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \qquad \longleftarrow \text{线性组合}}$$

定义 (线性相关, 线性无关)

一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 称为线性相关, 若存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0.$$

反之, 则称向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

例

记 $\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$. 则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 线性无关. 称这 n 个向量为基本向量.

多重求和号

性质

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

线性方程组、基本问题以及解决方法

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. 解是否存在，是否唯一？
2. 如何求解？
3. 解集的公式表达。
4. 解集的几何结构。

前两个问题可以用Gauss 消元法解决：

	初等变换	记号
(1)	交换两个方程	$(i) \leftrightarrow (j)$
(2)	某个方程乘以一个非零常数	$\lambda(i)$
(3)	某个方程成一个常数加到另一个方程上	$\lambda(i) \rightarrow (j)$

例 (解存在且唯一)

求解 $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & = & 35 & \quad (1) \\ 2x & + & 4y & = & 94 & \quad (2) \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & 23 \\ & & y & = & 12 \end{array}\right.$$

例 (解存在但不唯一)

求解 $\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & -3 & \quad (1) \\ x_1 & +2x_2 & & -5x_4 & = & 1 & \quad (2) \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -19x_4 & = & 6 & \quad (3) \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & -24x_4 & = & 7 & \quad (4) \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 1 - 2t_1 + 5t_2 \\ x_2 & = t_1 \\ x_3 & = -\frac{4}{3} - 3t_2 \\ x_4 & = t_2 \end{array}\right. \qquad \text{其中} t_1, t_2 \in F.$$

例 (无解)

求解 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 & (3) \end{cases}$

解:

$$\xrightarrow[-2(1)\to(3)]{-1(1)\to(2)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (4) \\ -2x_3 = 2 & (5) \\ -3x_3 = 1 & (6) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-\frac{3}{2}(5)\to(6)]{\frac{1}{2}(5)\to(4)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ -2x_3 = 2 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无解!!

我们称有相同的解集的两个线性方程组互为对方的同解方程组.

定理

三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组.

证明.

这里只给出第三种初等变换的证明，其他两种情形证明类似。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n=b_j \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \xrightleftharpoons[-\lambda(i)\to(j)]{\lambda(i)\to(j)} \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ (a_{j1}+\lambda a_{i1})x_1+\cdots+(a_{jn}+\lambda a_{in})x_n=b_j+\lambda b_i \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

□

矩阵

定义

我们称由若干行及若干列的数组成的阵列为矩阵.

例如: 线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

的系数和常数项组成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \longleftarrow (*) \text{ 的增广矩阵}$$

注：由于变元不参与运算，因此可以用增广矩阵来表示方程组。

例 (非齐次线性方程组)

求解 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$.

解：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1 \to r_3]{-3r_1 \to r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_3 \to r_1]{7r_3 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{3}{7} r_2 \to r_1]{-\frac{1}{7} r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

例 (齐次线性方程组)

求解 $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$.

解：
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5r_1 \to r_3]{-3r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \to r_3 \\ -r_2 \to r_4}]{\substack{r_2 \to r_1 \\ -r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = t_1 + t_2 + 5t_3 \\ x_2 & = -2t_1 - 2t_2 - 6t_3 \\ x_3 & = t_1 \\ x_4 & = t_2 \\ x_5 & = t_3 \end{array}\right.$$

其中 t_1, t_2, t_3 为参变量.

例 (无解)

求解 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$.

解：
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -7 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -9 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 原方程组无解!!

按照 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, \cdots, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_1, \cdots, b_m$ 的顺序找到第一个非零元. 不妨设其为 $a_{i_1j_1}$. 即, 矩阵前 j_1-1 列全为零, 第 j_1 列的前 i_1-1 个元素全为零且 $a_{i_1j_1}\neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & 0 & a_{1j_1+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0\cdots 0 & 0 & a_{2j_1+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots\ddots\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & a_{i_1-1j_1+1} & \cdots & a_{i_1-1n} & b_{i_1-1} \\ 0\cdots 0 & {\color{blue}a_{i_1j_1}} & a_{i_1j_1+1} & \cdots & a_{i_1n} & b_{i_1} \\ 0\cdots 0 & {\color{red}a_{i_1+1j_1}} & a_{i_1+1j_1+1} & \cdots & a_{i_1+1n} & b_{i_1+1} \\ \vdots\ddots\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & {\color{red}a_{mj_1}} & a_{mj_1+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

1. 将第 i_1+1 至 m 行减去第 i_1 行的合适倍数，使得第 j_1 列除第 i_1 行外全为零;
2. 将矩阵的第 1 行与第 i_1 行交换. 从而我们得到如下形式的矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \cdots & a_{1,j_1}^{(1)} & a_{1,j_1+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
\hline
 & & & a_{2,j_1+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
 & & & a_{3,j_1+1}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{m,j_1+1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)}
\end{array}\right)$$

3. 对 2 中得到的矩阵的右下角矩阵重复 1 和 2 得

$$
\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
0 & \cdots & a_{1,j_1}^{(1)} & \cdots & a_{1,j_2}^{(1)} & a_{1,j_2+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & & & & a_{2,j_2}^{(2)} & a_{2,j_2+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\hline
 & & & & & a_{3,j_1+1}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & a_{m,j_1+1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)}
\end{array}\right)
$$

4. 继续重复上述步骤最终得到矩阵 (最简形式、标准形式) 如下 $(r \le n)$

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & c_{1,j_1} & \cdots & c_{1,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1,j_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
 & & & & c_{2,j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2,j_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
 & & & & & & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
 & & & & & & & & & & & d_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

定理

方程组(*)的解有如下性质：

1. 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则无解；
2. 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 则解唯一；
3. 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$, 则有多解.

显然 $(0, \ldots, 0)$ 为齐次线性方程的一组解，我们称之为零解或平凡解. 齐次线性方程组的非零解称为非平凡解.

推论

1. 齐次线性方程组有非平凡解当且仅当 $r < n$. 特别地，若齐次方程个数小于变量个数, 即 $m < n$，则其一定有非平凡解.

注：数量 r 代表独立方程的个数，它决定了解集的“大小”.

证明

- 若 $d_{r+1} \neq 0$，则最后一个非零行代表 $0 = d_{r+1}$。显然矛盾。因此原方程无解。
- 若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 则

$$\text{标准形式} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & c_{n,n} & d_n \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & & & & \widetilde{d}_1 \\ & c_{22} & & & \widetilde{d}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & c_{n,n} & \widetilde{d}_n \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left(\frac{\widetilde{d}_1}{c_{11}}, \cdots, \frac{\widetilde{d}_n}{c_{nn}}\right)$ 为原方程的唯一解。

若 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n$, 则标准形式可通过初等变换化为

$$\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & 1 & e_{1,j_1+1}\cdots e_{1,j_2-1} & 0 & e_{1,j_2+1} & \cdots & \cdots & \cdots & e_{1,j_r-1} & 0 & e_{1,j_r+1}\cdots e_{1n} & f_1 \\ & & & 1 & e_{2,j_2+1} & \cdots & \cdots & \cdots & e_{2,j_r-1} & 0 & e_{2,j_r+1}\cdots e_{2n} & f_2 \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & e_{r,j_r+1}\cdots e_{rn} & f_r \end{pmatrix}$$

因此，我们有

$$\begin{cases} x_{j_1} & = f_1 - e_{1,j_1+1}x_{j_1+1} - \cdots - e_{1,j_2-1}x_{j_2-1} - e_{1,j_2+1}x_{j_2+1} - \cdots - e_{1,n}x_n \\ x_{j_2} & = f_2 - e_{2,j_2+1}x_{j_2+2} - \cdots - e_{2,j_3-1}x_{j_3-1} - e_{2,j_3+1}x_{j_3+1} - \cdots - e_{2,n}x_n \\ & \vdots \\ x_{j_r} & = f_r - e_{r,j_r+1}x_{j_r+1} - \cdots - e_{r,n}x_n \end{cases}$$

显然，其中 $n-r$ 变元 $x_1,\cdots,x_{j_1-1},x_{j_1+1},\cdots,x_{j_r-1},x_{j_r+1},\cdots,x_n$ 可取任意值，且任意给定的取值可以唯一确定剩下的变元 $x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$ 的取值。从而我们可以方程组(*)的解集表示为

$$\begin{cases} x_1 & = & \alpha_{11}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n-r}t_{n-r} & + & \beta_1, \\ x_2 & = & \alpha_{21}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n-r}t_{n-r} & + & \beta_2, \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots \\ x_n & = & \alpha_{n1}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n,n-r}t_{n-r} & + & \beta_n, \end{cases} \qquad (**)$$

其中 $t_1,\cdots,t_{n-r}\in F$. 我们称(**)为方程组(*)的通解. 当参数 $t_1,\cdots,t_{n-r}$ 取一组值带入(**)得到的解成为一个特解.

例

求解 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$

解：$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_3]{\substack{\frac{2}{5}r_2 \to r_1 \\ -\frac{1}{5}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix}.$

因此，原方程有解当且仅当 $\lambda = 5$. 当 $\lambda = 5$ 时，原方程通解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}t_1 - \frac{6}{5}t_2 + \frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5}t_1 - \frac{7}{5}t_2 + \frac{3}{5} \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in F.$$

问题 (2015 spring)

问 a 为何值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 15x_4 = a \end{cases}$$

有解，求出其所有解。

问题 (2015 fall)

问 a 分别为何值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$$

无解，有唯一解，和有无穷多组解，并求出当方程组有无穷多组解的时候，方程组的通解是什么

问题 (2017 fall)

已知下面的线性方程组同解，试求出 a,b,c 的值

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_1 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 - c \end{cases}$$

定义 (矩阵)

一个$m \times n$ 矩阵为由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

记作 $A = (a_{ij})_{m\times n}$. 称 a_{ij} 为矩阵 A 的第 (i,j) 元素; 当 $i = j$ 时,a_{ii} 也称为 A 的对角元.

若两个矩阵 A 和 B 的行数和列数相同且对应位置的元素都相同, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 否则称 A 与 B 不相等, 记为 $A \neq B$. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

按照矩阵行列数大小, 非零元分布或元素取值范围等, 我们有如下特殊矩阵命名:

1. n 维行向量 $:= 1 \times n$ 矩阵;
2. n 维列向量 $:= n \times 1$ 矩阵;
3. 零矩阵 O, 或 0;
4. n 阶方阵;
5. 单位阵 I;
6. 数量矩阵 aI;
7. 对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$;
8. 上 (下) 三角矩阵;
9. (反) 对称矩阵;
10. 整数矩阵;有理数矩阵;实矩阵;复矩阵;
11. 数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵;
12. 多项式矩阵.

例

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为整系数对称 2 阶方阵.
- $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & -1 \\ -\sqrt{-1} & 0 & \pi \\ 1 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$ 为复系数反对称 3 阶方阵.
- $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{3}} \end{pmatrix}$ 为复系数 2 阶数量矩阵.